

Esempi di sottospazi vettoriali.

In $\mathbb{R}^3 = V$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V \mid 2a + b + c = 0 \right\}$$

W è un sottospazio vettoriale?

W è l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

① $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} W$ Sì

② $\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \in W$ e $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in W$

Valore che $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} W$

Controlliamo;

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) &= (2a_1 + b_1 + c_1) + \\ &+ (2a_2 + b_2 + c_2) = 0 \end{aligned}$$

③ se $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} W$$

Si verifica semplice
a voi

Dunque W è un sottospazio di $V = \mathbb{R}^3$
(è il piano ortogonale a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passante per

l'origine.)

Più in generale con lo stesso procedimento si dimostra che:

Se $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo (cioè con le equazioni $\dots = 0$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + & + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + & + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$
OMOGENEO

Allora W è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^n$.

Opp. Se il sistema non fosse omogeneo allora

W NON sarebbe un sottospazio.

Capitolo 3

Sia V sp. vettoriale e siano v_1, v_m vettori

Le si può scrivere un vettore $v \in V$ così:

si dice che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ dove i $\lambda_i \in \mathbb{R}$,
 v è una COMBINAZIONE LINEARE di v_1, v_m .

Esempio $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ è una}$$

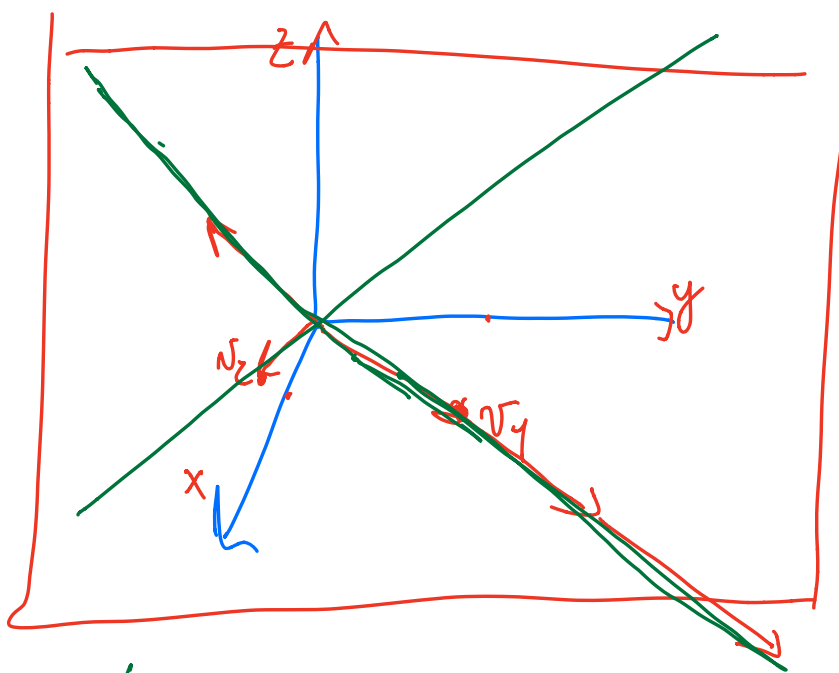
comb. lineare di v_1 e v_2 .

In particolare

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Chi è l'insieme W di tutte le combinazioni
lineari di v_1 e v_2 ?



W è il piano su cui giacciono le due
rette verdi. W è un sottospazio vettoriale
come potete verificare:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} W \quad \text{Sì}$$

$$0v_1 + 0v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ se } w_1 \in W \text{ e } w_2 \in W$$

$$\text{vale } w_1 + w_2 \in W \quad ? \quad \text{Sì}$$

$$w_1 = a v_1 + b v_2 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$w_2 = c v_1 + d v_2 \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{matrix} (a v_1 + b v_2) + (c v_1 + d v_2) = \text{per le} \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ w_1 \qquad \qquad \qquad w_2 \end{matrix}$$

proprietà distributive ^{associative, commutative} degli spazi vettoriali =

$$= (a+c) v_1 + (b+d) v_2$$

è combinazione lineare di v_1 e v_2 , dunque $\in W$.

③ se $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora
 $\lambda w \in W$ Sì (a noi...)

Più in generale.

Teorema Dati $v_1, \dots, v_m$ vettori in V , sia

W l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari. Allora W è un sottospazio vettoriale di V .

Def Dato W come sopra si dice che

W è il sottospazio generato da $v_1, \dots, v_m$

Si scrive:

$$W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \text{oppure}$$

$$W = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

Esempio $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Infatti vale $\subseteq$ perché

$$2v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 2v_1 + \beta v_2 + \gamma(v_1 + v_2) =$$

infatti nel nostro esempio $v_3 = v_1 + v_2$

$$= (2 + \gamma)v_1 + (\beta + \gamma)v_2 \text{ e dunque } \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

per proprietà distributiva, commutativa etc. ...

Vale anche $\supseteq$ perché

$$a v_1 + b v_2 = a v_1 + b v_2 + 0 v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Def Sia V uno spazio vettoriale e sia
 $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori tali che
 $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Si dice in tal caso che $v_1, \dots, v_n$ generano V .

Esempio $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vedete immediatamente che v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$

Oppure, dati:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

w_1, w_2, w_3, w_4 generano $\mathbb{R}^3$

Come si fa a verificare?

Prendo un qualunque vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Voglio controllare se posso esprimerlo come combinazione lineare di w_1, w_2, w_3, w_3

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

riga per riga è

$$\begin{cases} x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 1 + t \cdot 0 = a \\ x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 0 + t \cdot 2 = b \\ x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 1 + t \cdot (-1) = c \end{cases}$$

è un SISTEMA !

In un caso concreto $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice completa è per un qualunque $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \end{pmatrix}$$

Reduciamo a scala per trovare i ranghi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & -3 & c-b+a \end{pmatrix}$$

Il sistema ha sempre soluzione.

È vero dunque che

$$\mathbb{R}^3 = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$$

Ripetendo lo stesso ragionamento senza considerare w_4 si ottiene subito che vale anche:

$$\mathbb{R}^3 = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

Paragrafo 3.2 INDIPENDENZA LINEARE

Def Dato V sp. vettoriale, i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI

se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Example

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^3$$

are lin INDIP.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implies $\alpha = 0, \beta = 0$

Example

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

w_1, w_2, w_3 NON are LIN INDIP

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esempio $V = \mathbb{R}[x]$

$$p_1(x) = x^2 - x + 2$$

$$p_2(x) = x - 5$$

$$p_3(x) = x^2 + 1$$

$$p_4(x) = 8$$

p_1, p_2, p_3, p_4 sono lin INDIP?

Si imposta

$$\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x) + \delta p_4(x) = 0$$

e si cerca di capire se deve essere $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

$$\alpha(x^2 - x + 2) + \beta(x - 5) + \gamma(x^2 + 1) + \delta \cdot 8 = 0$$

grado
per grado

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 5\beta + \gamma + 8\delta = 0 \end{cases}$$

MATRICE COMPLETA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

riduco per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- c'è soluzione
- c'è una soluzione lunga, e avremo dunque una variabile libera, In particolare ci sono INFINITE SOLUZIONI

Allora p_1, p_2, p_3, p_4 NON SONO LIN INDIP